	عنوان الدرس : المثلث القائم الزاوية المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي مدة الإنجاز : 13 ساعات من إعداد وتقديم : ذ. المصطفى ترشيش	

المكتسبات القبلية	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
*جيب تمام التمام لزاوية حادة *مبرهنة فيتاغورس المباشرة *المثلث المتساوي الساقين وخصائصه، المثلث المتساوي الضلاع وخصائصه .	*معرفة واستعمال العلاقات بين جيب وجيب التمام وظل زاوية حادة وطولي ضلعين في مثلث قائم الزاوية. *استعمال الآلة الحاسبة لتحديد قيم مقربة للنسب المثلية لزاوية حادة وعكسيا. *استعمال مبرهنة فيتاغورس وعكسيتها في الهندسة المستوية وفي بعض المضلعات المنتظمة. *مقارنة زاوية محيطية وزاوية مركزية تحصران نفس القوس في دائرة.	* يعتبر جيب التمام من مكتسبات التلاميذ بالسنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي، وبالتالي فإنه ينبغي تقديم جيب زاوية حادة وظل زاوية حادة اعتمادا على مكتسبات التلاميذ ثم يتم إثبات العلاقتين: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ حيث x هو قياس زاوية حادة بالدرجة. *تقديم واستعمال بعض العلاقات المترية من خلال تمارين دون أن تكون موضوع درس: إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في A وH المسقط العمودي للنقطة A على (BC)، فإن: AB.AC=BC.AH $AH^2=HB.HC$ $AB^2=HB.BC$ *ينبغي تطبيق علاقة فيتاغورس على الثلث القائم الزاوية والمثلث المتساوي الساقين والمثلث المتساوي

		الأضلاع في بعض الأطوال والنسب المثلية لزاوية حادة . *يمكن التطرق إلى بعض المضلعات المنتظمة من خلال تمارين.

سير الدرس (أنشطة تمهيدية) + المحتوى (ملخص الدرس)	تمارين تقويمية و منزلية
# مبرهنة فيتاغورس **I مبرهنة فيتاغورس المباشرة :** 1) – خاصية : إذا كان ABC مثلثا قائم الزاوية في A فإن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ملاحظة: إذا كان المثلث ABC غير قائم الزاوية في A فإن : $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$	تمرين 1 ABC مثلث قائم الزاوية في A . إذا علمت أن : $AB = 5\sqrt{2}$ و $BC = 3\sqrt{11}$ فاحسب AC . تمرين2 ABC مثلث بحيث : $AB = 2\sqrt{3}$ و $AC = \sqrt{13}$ و $BC = 5$. 1) – أثبت أن المثلث ABC قائم الزاوية. 2) – لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) . أحسب معللا جوابك : AH و BH و CH .

2) – تطبيقات:

ABC مثلث قائم الزاوية في C بحيث : $AC = 2\sqrt{2}$ و $AB = 10$.

لنحسب BC .

بما أن المثلث ABC قائم الزاوية في C فإن : $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة)

إذن :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 - AC^2 \\ &= 10^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 100 - 8 \\ &= 92 \end{aligned}$$

و منه فإن :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{92} \\ &= \sqrt{4 \times 23} \\ &= 2\sqrt{23} \end{aligned}$$

II _ مبرهنة فيتاغورس العكسية :

نشاط تمهيدي

لنعتبر ABC مثلث حيث : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

بين أن ABC مثلث قائم الزاوية في A

1) – خاصية :

إذا كان ABC مثلثا بحيث $BC^2 = AB^2 + AC^2$

فإن : ABC قائم الزاوية في A .

2) – تطبيقات:

EFG مثلث بحيث : EF = 10 و FG = 8 و CG = 6

لنبين أن EFG مثلث قائم الزاوية .

لدينا :

$$EF^2 = 10^2 = 100$$
$$EG^2 = 6^2 = 36$$
$$FG^2 = 8^2 = 64$$

نلاحظ أن : $100 = 36 + 64$

أي : $EF^2 = EG^2 + FG^2$

وحسب مبرهنة فيتاغورس العكسية فإن EFG مثلث قائم الزاوية في G .

III نتائج :

نشاط تمهيدي

ABC مثلث قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC)

1- أنشئ شكل هندسي

2- بين أن :

$$\begin{cases} AB \times AC = AH \times BC \\ AH^2 = HB \times HC \\ AB^2 = BH \times BC \\ AC^2 = CH \times CB \end{cases}$$

نتيجة

إذاكان ABC مثلث قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) .

فإن

$$\begin{cases} AB \times AC = AH \times BC \\ AH^2 = HB \times HC \\ AB^2 = BH \times BC \\ AC^2 = CH \times CB \end{cases}$$

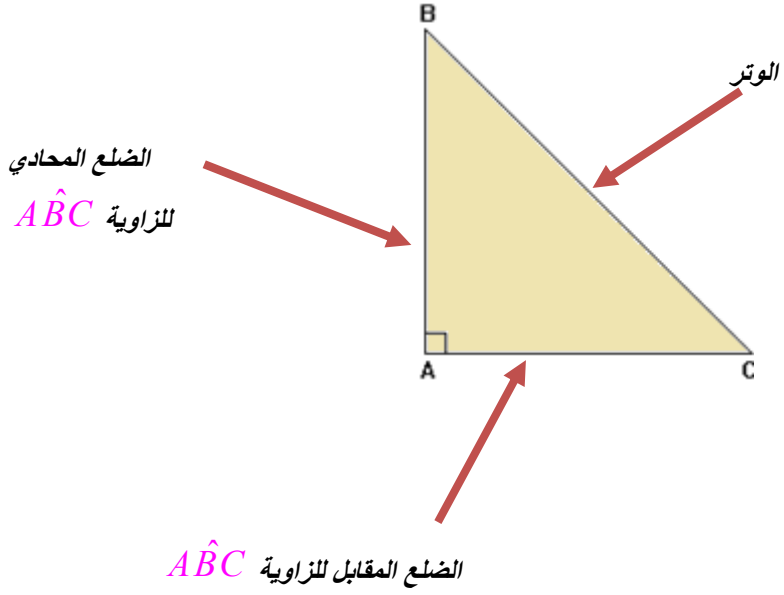
نسمي هذه العلاقات : العلاقات المترية في المثلث القائم الزاوية .

الحساب المثلثي

I _ النسب المثلثية لزاوية حادة :

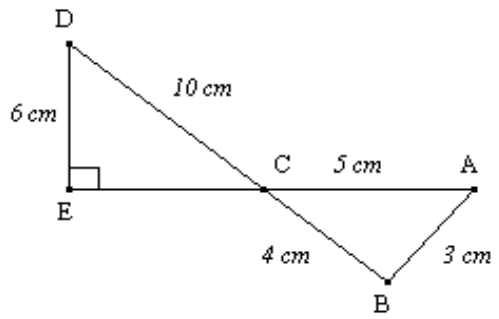
1) – تعاريف :

ABC مثلث قائم الزاوية في A



تمرين3

نعتبر الشكـل الآتي :



1) – بين أن : المثلث ABC قائم الزاوية.

2) – أثبت أن : $\cos E\hat{D}C = \frac{3}{5}$.

3) – استنتج حساب : $\sin E\hat{D}C$ و $\tan E\hat{D}C$.

أ) -- جيب تمام زاوية حادة :

النسبة $\frac{AB}{BC}$ تسمى جيب تمام الزاوية $A\hat{B}C$.

يرمز لها بالرمز $\cos A\hat{B}C$ و نقرأ cosinus $A\hat{B}C$

و نكتب : $\cos A\hat{B}C = \frac{AB}{BC}$

أي $\cos A\hat{B}C = \frac{\text{طول الضلع المحادي}}{\text{طول لوتر}}$

ب) -- جيب زاوية حادة :

النسبة $\frac{AC}{BC}$ تسمى جيب الزاوية $A\hat{B}C$.

يرمز لها بالرمز $\sin A\hat{B}C$ و نقرأ sinus $\cos A\hat{B}C = \frac{AB}{BC}$

و نكتب : $\sin A\hat{B}C = \frac{AC}{BC}$

أي $\sin A\hat{B}C = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول لوتر}}$

تمرين 4:

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث :

BC = 5 cm و AB = 3 cm و AC = 4 cm

أحسب النسب المثلثية للزاوية $A\hat{C}B$.

تمرين 5:

ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث :

AC=4 و $\sin A\hat{B}C$ =0,625 أحسب BC و AB

ج) -- ظـل زاوية حادة :

النسبة $\frac{AC}{AB}$ تسمى ظـل الزاوية $A\hat{B}C$.

يرمز لها بالرمز $\tan A\hat{B}C$ و نقرأ $A\hat{B}C$ tangente

و نكتب : $\tan A\hat{B}C = \frac{AB}{BC}$

أي $\tan A\hat{B}C = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{الضلع المحادي}}$

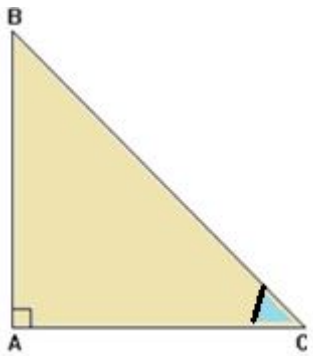
2) – مثال:

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث :

AB = 3 cm و BC = 5 cm

و AC = 4 cm

لنحسب النسب المثلثية للزاوية $A\hat{C}B$.



تمرين6 :

ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث :

AC=3 و $\tan A\hat{B}C$ =0,75

أحسب BA و CB

تمرين7 :

AEF مثلث قائم الزاوية في A

حيث : AF=4 و AE=5

1- أحسب EF

2 - أحسب :

أ- النسب المثلثية للزاوية $[A\hat{F}E]$

ب- النسب المثلثية للزاوية $[A\hat{E}F]$

3- لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على (EF).

أحسب HF و AH و EH.

أ) --- حساب $\cos A\hat{C}B$:

لدينا :

$$\cos A\hat{C}B = \frac{AC}{BC}$$

إذن :

$$\cos A\hat{C}B = \frac{4}{5}$$

ب) --- حساب $\sin A\hat{C}B$:

لدينا :

$$\sin A\hat{C}B = \frac{AB}{BC}$$

إذن :

$$\sin A\hat{C}B = \frac{3}{5}$$

ج) --- حساب : $\tan A\hat{C}B$

تمرين8 :

α قياس زاوية حادة

1- احسب $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ علما أن: $\cos\alpha = 0,2$

3- احسب $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ علما أن:

$$\tan\alpha = \sqrt{15}$$

4-

تمرين 9:

بسط مايلي: حيث α قياس زاوية حادة

$$a = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$$

$$b = \cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha - 1$$

$$c = \cos^4\alpha + 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$$

$$d = \frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1-\sin\alpha} - \frac{2}{\cos^2\alpha}$$

$$e = \sqrt{\cos\alpha + 1} \times \sqrt{1 - \cos\alpha} \times \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$f = \frac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$g = \left(\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}\right)\sqrt{1 + 2\cos\alpha.\sin\alpha} \times 2\left(1 - \cos^2\alpha\right)$$

لدينا :

$$\tan A\hat{C}B = \frac{AB}{AC}$$

إذن :

$$\tan A\hat{C}B = \frac{3}{4}$$

II خصـائص :

نشاط تمهيدي

ليكن ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث : $\widehat{ACB} = \alpha°$ و $\widehat{ABC} = \beta°$

1- بين أن $0 < \sin\alpha < 1$ و $0 < \cos\alpha < 1$

2- بين أن $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

3- بين أن $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

4- بين أن $\alpha + \beta = 90°$ ثم

$$\cos\alpha = \sin\beta$$
$$\sin\alpha = \cos\beta$$
$$\tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta}$$

تمرين10 :

1- α قياس زاوية حادة .

بين أن : $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$

و أن : $\sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

2- احسب : $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ علما أن:

$$\tan\alpha = 4\sqrt{3}$$

تمرين 11:

1ـ باستعمال الآلة الحاسبة حدد $\sin 30°$

1ـ استنتج : $\cos 30°$ و $\tan 30°$

2ـ أستنتج النسب المثلثية للقياس $60°$

تمرين 12:

بسط مايلي:

$$e = \cos 25° + \cos 70° - \sin 65° + \sin 20°$$

$$f = \sin 80° + 7\sin^2 50 - \cos 10° + 7\sin^2 40°$$

1) – الخاصية الأولى :

مهما كان α قياس زاوية حادة $(0° < \alpha < 90°)$

فإن : $0 < \cos\alpha < 1$ و $0 < \sin\alpha < 1$

2) – الخاصية الثانية :

مهما كان α قياس زاوية حادة $(0° < \alpha < 90°)$

فإن : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

3) – الخاصية الثالثة :

مهما كان α قياس زاوية حادة $(0° < \alpha < 90°)$

فإن : $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

4) – الخاصية الرابعة : النسب المثلثية لزاويتين متتامتين .

α و β قياسي زاويتن حادتين بحيث : $\alpha + \beta = 90°$

$\cos\alpha = \sin\beta$

$\cos\beta = \sin\alpha$

$\tan\beta = 1/\tan\alpha$

$\tan\alpha = 1/\tan\beta$

5) – النسب المثلثية لزوايا خاصة :

نشاط تمهيدي:

ليكن ABC مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A (أنشئ شكل هندسي)

1- أحسب :sin45° واستنتج cos45° وtan45°

2- لتكن D نقطة حيث BCD مثلث متساوي الأضلاع و A خارجه . H المسقط العمودي لDعلى (BC) (أتمم الشكل)

أ) أحسب : sin30° و cos30° وtan30°

ب) استنتج :sin60° وcos60° وtan60°

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\cos\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

III) طريقة استعمال الآلة الحاسبة:

1- تحديد النسب المثلثية لزاوية حادة.

لتحديد النسب المثلية لزاوية حادة نتبع الخطوات التالية: إتباع السهم

x → sin → =

x → cos → =

x → tan → =

2- تحديد قياس زاوية حادة انطلاقا من إحدى نسبها المثلثية.

- لتحديد زاوية حادة x تحقق $\cos x = a$ أو $\sin x = a$ حيث $0 \leq a \leq 1$

نتبع الخطوات التالية :

a → shift → Cos^{-1} → =

- a → shift → Sin^{-1} → =

لتحديد زاوية حادة x أو قيمة مقربة لها باستعمال الآلة الحاسبة

تحقق $\tan x = a$ حيث عدد حقيقي أكبر قطعا من 0 .

نتبع الخطوات التالية :

a → shift → $\tan^{-1}$ → =

الزاوية المحيطية والزاوية المركزية

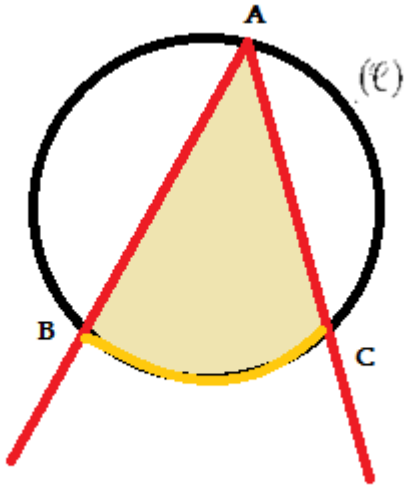
I الزاوية المحيطية :

1) – تعريف :

الزاوية المحيطية هي كل زاوية رأسها ينتمي إلى دارة

و ضلعاها يقطعان الدائرة

2) – شكل توضيحي :



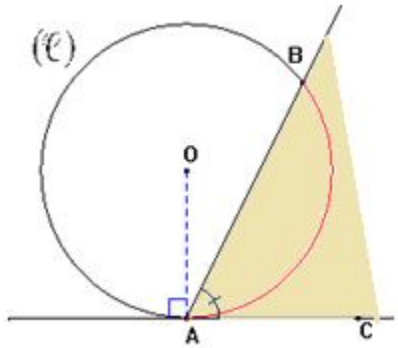
نعتبر الشكـل جانبه :

نقول : الزاوية $B\hat{A}C$ زاوية محيطية.

نقول كذلك : $B\hat{A}C$ زاوية محيطية تحصر القوس $\overset{\frown}{BC}$.

3) – حالة خاصة :

لاحظ الشكـل التالي بحيث المستقيم (AC) مماس للدئرة في النقطة A .



نقول : الزاوية $B\hat{A}C$ زاوية محيطية تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$.

II الزاوية المركزية :

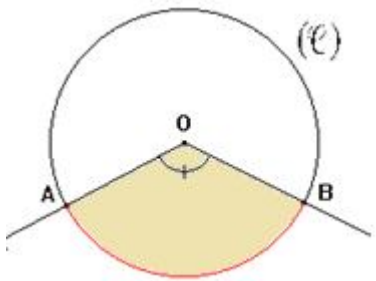
1) – تعريف :

الزاوية المركزية هي كل زاوية رأسها مركز دارة

و ضلعاها يقطعان الدائرة

2) – شكل توضيحي :

نعتبر الشكـل التالي :



نقول : الزاوية $A\hat{O}B$ زاوية مركزية.

نقول كذلك : الزاوية $A\hat{O}B$ زاوية مركزية تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$.

III _ خصـائص : كل الخصائص يبرهن عنها

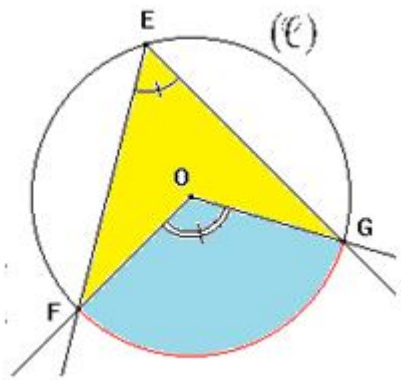
1) – ملاحظة :

تكون زاوية مركزية مرتبطة بزاوية محيطية

إذا كانتا تحصران نفس القـوس

* شكل توضيحي :

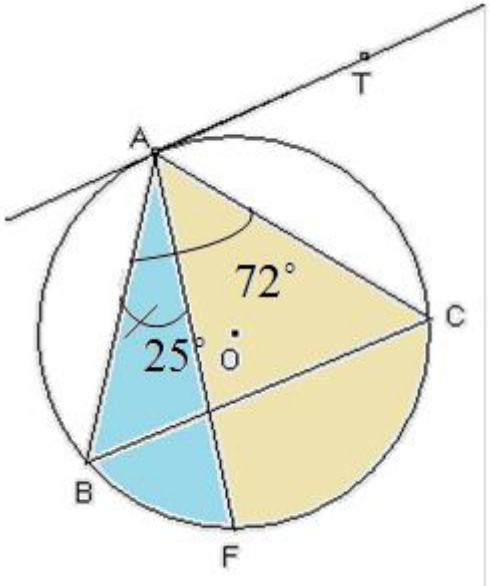
لاحظ الشكـل جانبه :



تمرين13

نعتبر الشكل أسفله حيث ABC مثلث متساوي الساقين في A ومحاط بالدائرة و (AT) مماس لهذه الدائرة.

و $B\hat{A}C = 72^\circ$ و $B\hat{A}F = 25^\circ$



أحسب: $B\hat{C}F$ ، $F\hat{O}C$ ، $A\hat{B}C$ و $C\hat{A}T$.

نقول : الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $F\hat{E}G$ هي الزاوية $F\hat{O}G$

لأنهما تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{FG}$

سؤال 1: هل الزاوية المحيطية والزاوية المركزية المرتبطة بها متقايستان ؟ وضح ذالك .

سؤال 2: قارن قياسي زاويتين محيطيتين تحصران نفس القوس .

2) – الخـاصية الاولى :

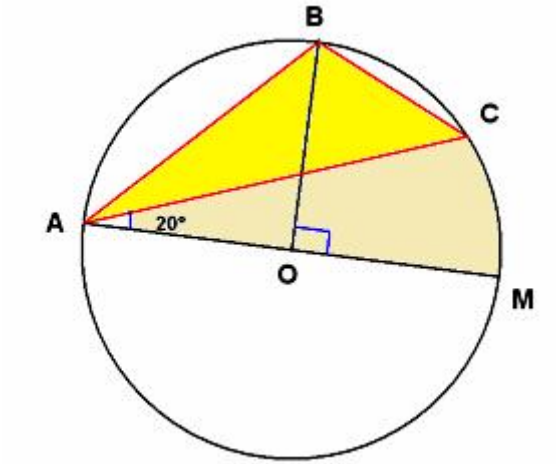
قياس زاوية محيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المرتبطة بها

* شكل توضيحي :

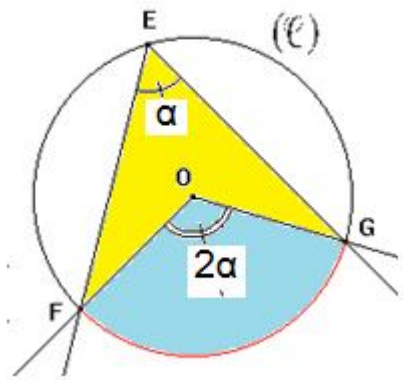
لاحظ الشكـل أسفله :

تمرين14

نعتبر الشكل التالي (O مركز الدائرة)



أحسب قياسات زوايا المثلث ABC



لدينا : $F\hat{E}G$ زاوية محيطية و $F\hat{O}G$ الزاوية المركزية المرتبطة بها.

إذن : $F\hat{E}G = \frac{1}{2}F\hat{O}G$

3) – الخـاصية الثانية :

زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

تكونان مقايستين

* مثال :

لاحظ الشكـل التالي :

تمرين15

(C) دائرة مركزها O وشعاعها 3،

و ABF مثلث محاط بها حيث : $B\hat{A}F = 40^\circ$

ولتكن H النقطة المتقابلة قطريا مع F

في الدائرة(C).

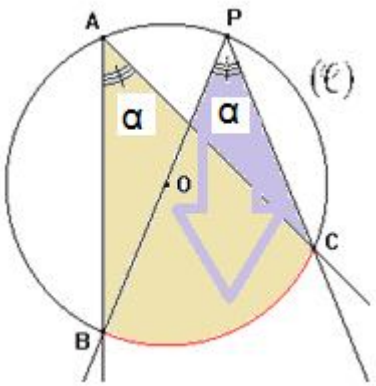
1- أنشئ الشكل.

2- أحسب $B\hat{H}F$

3- استنتج أن : $BF = 6\sin 40^\circ$

4- نعطي $\sin(40^\circ) \approx 0,65$

أحسب BF

	 لدينا : $B\hat{A}C$ و $B\hat{P}C$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{BC}$ إذن : $B\hat{A}C = B\hat{P}C$