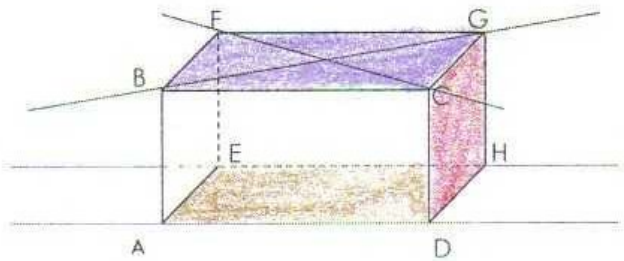
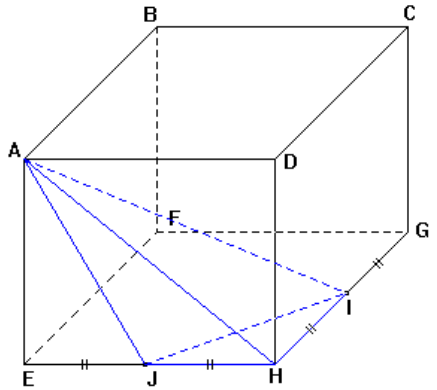
دادة	عنوان الدرس : الهندسة الفضائية المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي مدة الإنجاز : 8 ساعات من إعداد وتقديم : ذ. المصطفى ترشيش	

المكتسبات القبلية	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
❖ إنشاء نموذج موشور قائم قاعدته مثلث أو متوازي أضلاع أبعاده معلومة. ❖ إنشاء نموذج لأسطوانة قائمة قاعدتها دائرة و شعاعها معلوم. ❖ تمثيل مجسم دون استعمال الأدوات الهندسية. ❖ التمكن من نشر المجسمات وتمثيلها وإنشاء نماذج لها. ❖ حساب المساحات و الحجوم.	❖ التعرف على حجوم المجسمات الاعتيادية التالية : متوازي المستطيلات ، المكعب ، الهرم المنتظم ، الأسطوانة القائمة. ❖ تطبيق مبرهنة فيتاغورس لحساب بعض الأطوال والحجوم في المجسمات الاعتيادية. ❖ التعرف على أثر تكبير أو تصغير على الأطوال و المساحات والحجوم. ❖ استعمال تكبير و تصغير الأشكال في حل مسائل.	❖ تعتبر جميع صيغ المساحات و الحجوم مقبولة في هذا المستوى. ❖ ينبغي دراسة وإبراز بعض الأوضاع النسبية و التعامد من خلال أنشطة حول الموشور القائم. ❖ يبرهن على أنه إذا كان معامل التكبير أو التصغير هو K فإن : ❖ الطول يضرب في k و المساحة في k^2 و الحجم في K^3

سير الدرس (أنشطة تمهيدية) + المحتوى (ملخص الدرس)	تمارين تقويمية و منزلية
1) الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء أ) المستقيمان المستويان مثال لنعتبر الشكل الهندسي التالي حيث ABCDEFGH متوازي المستطيلات  	تمرين1 ABC مثلث قائم الزاوية في A و E نقطة خارج المستوى (ABC) بحيث : ABE مثلث قائم الزاوية في A . لتكن M نقطة من المستقيم (EC) . 1) – أرسم شكلا مناسبا. 2) – بين أن المستقيم (AB) عمودي على المستوى (ACE) . 3) – استنتج أن المثلث ABM قائم الزاوية في A . تمرين2 نعتبر الشكل جانبه : 

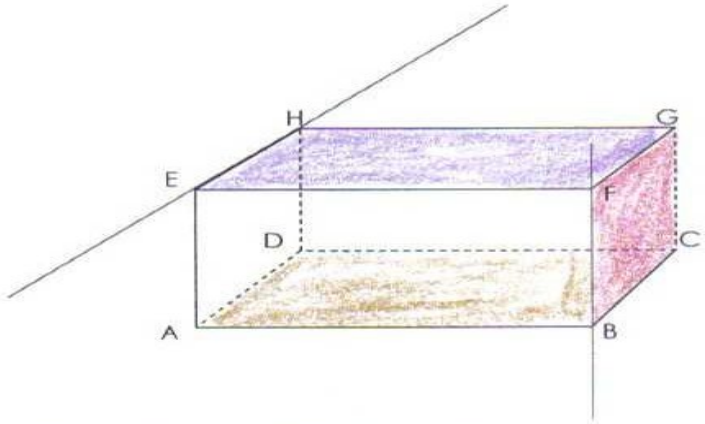
* نلاحظ أن المستقيمين (BG) و (FC) يوجدان ضمن المستوى (BCG) وهما متقاطعان
نقول (BG) و (FC) مستقيمان مستوانيين
* ونلاحظ أن المستقيمين (AD) و (EH) يوجدان ضمن المستوى (ADH) وهما متوازيين
نقول كذلك (AD) و (EH) مستقيمان مستوانيين

ملاحظة: كل مستقيمين متقاطعين أو متوازيين فهما مستوانيين

تعريف
المستقيمان المستوانيان هما كل مستقيمين موجودين ضمن نفس المستوى

ب) المستقيمان غير المستوانيين

مثال
لنعتبر الشكل الهندسي التالي حيث ABCDEFGH متوازي المستطيلات



* نلاحظ أن المستقيم (EH) يوجد ضمن المستوى (EFG) و المستقيم (BF) يخترق المستوى (EFG) في النقطة F
نقول (EH) و (BF) مستقيمان غير مستوانيين
ملاحظة: المستقيمان غير المستوانيين ليس بمتوازيين و لا بمتقاطعين وهما من المستحيل ان يكونا معا في نفس المستوى

تعريف
المستقيمان غير المستوانيين هما كل مستقيمين أحدهما يوجد ضمن مستوى والآخر مخترق لهذا المستوى

ج) تمرين محلول

ليكن SABC رباعي أوجه رأسه S . و النقطة I منتصف [SC] و J منتصف [SB]
1) أنشئ الشكل
2) بين أن (IJ) و (BC) مستوانيين
3) بين الوضع النسبي للمستقيمين (IJ) و (AS)

ABCDEFGH مكعب بحيث :
AB = 4 cm و I منتصف [GH] و J منتصف [EH] .
1) – بين أن (IJ) يوازي (AC) .
2) – بين أن (EI) ⊥ (AE) .
3) – أحسب : EI و AI .
4) – أحسب حجم الهرم AIJH .

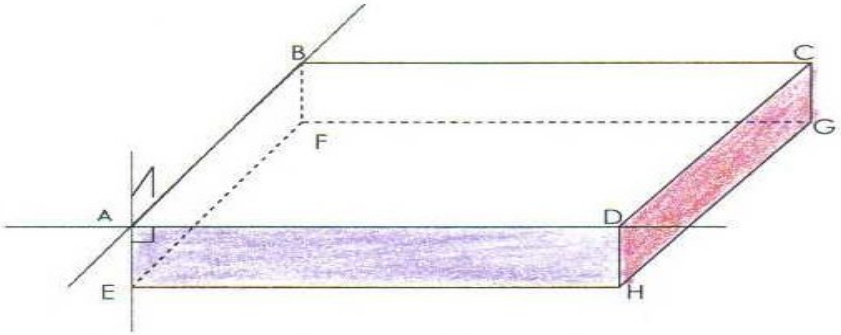
تمرين 3

نعتبر الشكـل جانبه بحيث :
SEFGH هرم قاعدته مستطيل بعداه EF = 6 cm
و FG = 4 cm و ارتفاعه SE = 6 cm.
المستقيم (SE) عمودي على المستوى (EFG).

2) تعامد مستقيم ومستوى

أ) تمهيد

لنعتبر ABCDEFGH متوازي مستطيلات حيث الشكل :



نلاحظ أن كل وجه من وجوه متوازي المستطيلات ABCDEFGH عبارة عن مستطيل
إذن : ABFE مستطيل و ADHE مستطيل
وبالتالي : المستقيم (AE) عمودي على كل من المستقيمين (AB) و (AD) في نقطة تقاطعهما A
وحيث (AB) و (AD) يوجدان ضمن المستوى (BAD)
فإننا نقول : المستقيم (AE) عمودي على المستوى (BAD)

ب) تعريف

نقول عن مستقيم أنه عمودي على مستوى في نقطة إذا كان هذا المستقيم عمودي على مستقيمين متقاطعين في هذه النقطة وموجودين ضمن هذا المستوى

ج) خصائص

تقبل الخصائص التالية :

خاصية 1

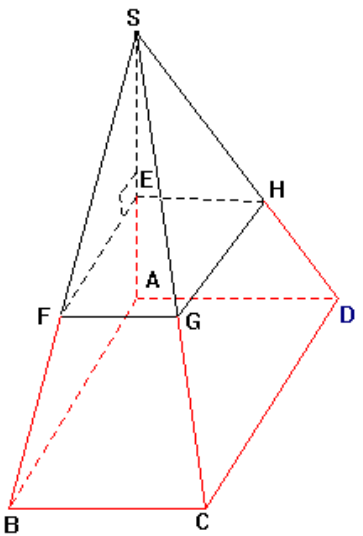
إذا كان مستقيم عمودي على مستوى في نقطة فإن هذا المستقيم سيكون عموديا على كل مستقيم مار بهذه النقطة وموجود بهذا المستوى

خاصية 2

إذا كان مستقيم عمودي على مستوى في نقطة فإن هذا المستقيم سيكون عموديا على كل مستقيم لايمر بهذه النقطة وموجود بهذا المستوى

خاصية 3

لكي يكون مستقيم عمودي على مستوى يجب أن يكون هذا المستقيم عمودي على مستقيمين متقاطعين موجودين ضمن هذا المستوى



1) – أثبت أن $(EG) \perp (SE)$.

2) – أحسب SG إذا علمت أن : $EG = 4\sqrt{2}$ cm

3) – أحسب V_1 حجم الهرم SEFGH .

4) – نفترض أن الهرم SABCD هو تكبير للهرم SEFGH .

أحسب V_2 حجم الهرم SABCD علما أن نسبة التكبير هي $\frac{5}{2}$

تمرين 4

لاحظ الشكـل أسفله بحيث :

SABCD هرم رأسه S وقاعدته المستطيل

د) **تطبيقات**

تمرين 1

ليكن ABCD رباعي أوجه حيث : ABC و ABD مثلثين قائما الزاوية في B

1) أنشئ الشكل

2) بين أن المستقيم (AB) عمودي على المستوى (BCD)

3) لتكن M نقطة ما من المستقيم (DC)

أ) أتم الشكل

ب) بين أن ABM مثلث قائم الزاوية

تمرين 2

ليكن HMAD رباعي أوجه منتظم (كل وجه من وجوهه عبارة عن مثلث متساوي الأضلاع)

O منتصف [AD]

1) أنشئ الشكل

2) بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوى (MOH)

3) بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستقيم (MH)

3) تطبيق مبرهنة فيتاغورس في الفضاء

أ) حساب طول قطر متوازي المستطيلات القائم

a) تمرين تمهيدي

ليكن ABCDEFGH متوازي مستطيلات قائم حيث: AB=xcm و BC=ycm و BF=zcm

1) أنشئ شكل هندسي

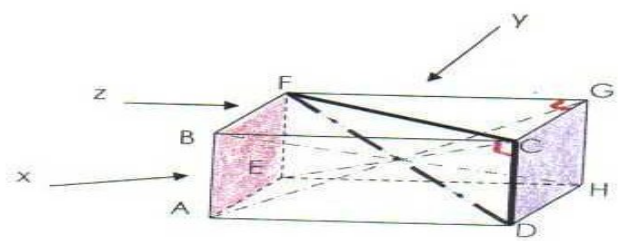
2) حدد في الشكل جميع أقطار ABCDEFGH

ماذا يمكنك ملاحظته حول هذه الأقطار ومنتصفاتها؟

3) أحسب FD

إشارة للحل

1) الشكل الهندسي



ABCD

المستقيم (AS) عمودي على المستوى $(ABCD)$

$AB = AS = 6$ cm و $BC = 3$ cm

.

1) – أثبت أن SAB و SAC مثلثان قائما الزاوية

و متساويا الساقين.

2) – استنتج حساب : SB و SC .

3) – أحسب AC .

4) – أحسب V حجم الهرم SABCD .

5) – نعتبر SA’B’C’D’ تصغيرا للهرم SABCD بنسبة $\frac{1}{3}$.

أ) -- أحسب S’ مساحة الهرم SA’B’C’D’ .

ب) -- أحسب V’ حجم الهرم SA’B’C’D’ .

2) تحديد الأقطار

من خلال الشكل سنستنتج أن لـABCDEFGH أربعة أقطار متقايسة ولها نفس المنتصف

3) حساب FD

* نطبق مبرهنة فيتاغورس على المثلث القائم الزاوية FGC في G فنجد :

$$(1)\ FC^2=FG^2+CG^2= y^2+z^2$$

* ونطبق مبرهنة فيتاغورس على المثلث القائم الزاوية FCD في C فنجد :

$$(2)\ FD^2=CD^2+FC^2$$

من (1) و (2) نجد : $FD^2=x^2+y^2+z^2$

وبالتالي: $FD=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

b) قاعدة

لمتوازي المستطيلات القائم أربعة أقطار متقايسة ولها نفس المنتصف

إذا كانت أبعاده هي xcm و ycm و zcm فإن طول أي قطر فيه هو $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ cm

c) تمرين تطبيقي

ليكن ABCDEFGH مكعب طول قطر له هو 9cm

أحسب طول حرفه

ب) حساب ارتفاع رباعي أوجه منتظم

a) تمرين تمهيدي

لنعتبر SABC رباعي أوجه منتظم رأسه S وطول حرفه acm

M منتصف [BC] و N منتصف [AC] و G مركز ثقل المثلث ABC

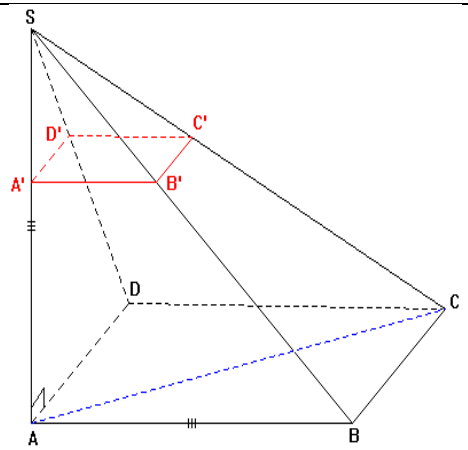
1) أنشئ الشكل

2) بين أن المستقيم (SG) عمودي على المستوى (ABC)

3) أحسب SG ارتفاع رباعي الأوجه المنتظم SABC

إشارة للحل

1) شكل هندسي



تمرين 5

ليكن SABCD هرما منتظما قاعدته المربع ABCD مركزه O.

(أنظر الشكـل أسفله) بحيث :

BC = 6 cm و SO = 10 cm .

M و N و P و Q هي على التوالي منتصفات : [SA] و [SB] و [SC] و [SD] .

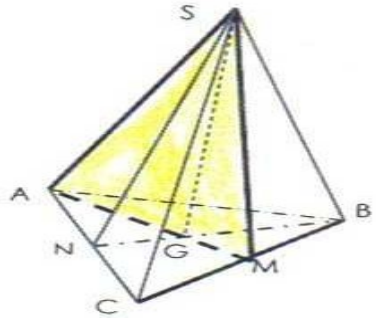
1) – أحسب MN معللا جوابك.

2) – أحسب S مساحة قاعدة الهرم SABCD

3) – أحسب V حجم الهرم SABCD .

4) – نفترض أن SMNPQ هو تصغير الهرم SABCD .

أ) -- حدد نسبة هذا التصغير.



2) لنبين أن (SG) عمودي على المستوى (ABC)

لدينا ABC مثلث متساوي الأضلاع و M منتصف [BC] إذن (BC) عمودي على (AM)

ولدينا SBC مثلث متساوي الأضلاع و M منتصف [BC] إذن (BC) عمودي على (SM)

وبما أن (SM) و (AM) مستقيمان متقاطعان ضمن المستوى (SAM) وهما عموديان على (BC)

فإن (BC) عمودي على المستوى (SAM)

وحيث (SG) ضمن المستوى (SAM) فإن (BC) عمودي على (SG) (1)

وسنجد كذلك (AC) عمودي على (SG) (2)

من (1) و (2) نجد (SG) عمودي على المستوى (ABC)

3) لنحسب SG

لدينا (SG) عمودي على المستوى (ABC) و (AM) ضمنه

إذن (SG) عمودي على (AM) في G

وبالتالي SAG مثلث قائم الزاوية في G

وتطبيقا لمبرهنة فيتاغورس نجد: $AS^2=SG^2+AG^2$ (1)

وحيث G مركز ثقل المثلث ABC فإن $AG=\frac{2}{3}AM$ إذن $AG^2=\frac{4}{9}AM^2$ (2)

وبما أن AMC قائم الزاوية في M و $AC=a\ cm$ و M منتصف [BC] وحسب مبرهنة فيتاغورس

فإن : $AM^2=a^2-\frac{1}{4}a^2$ أي $AM^2=\frac{3}{4}a^2$ (3)

من (1) و (2) و (3) نجد : $AS^2=SG^2+\frac{4}{9}\times\frac{3}{4}a^2$ أي $a^2=SG^2+\frac{1}{3}a^2$ (لأن $AS=a\ cm$)

إذن $SG^2=\frac{2}{3}a^2$

وبالتالي $SG=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a\ cm$ أي $SG=a\frac{\sqrt{6}}{3}cm$

b) قاعدة

ارتفاع رباعي أوجه منتظم طول حرفه $a\ cm$ هو $a\frac{\sqrt{6}}{3}cm$

c) تمرين تطبيقي

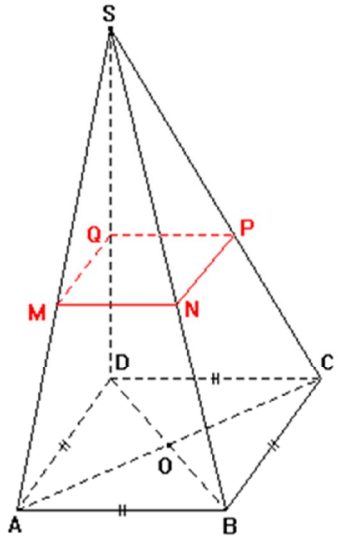
ليكن ABCD رباعي أوجه منتظم ارتفاعه 6cm

أحسب طول حرفه

4) الحجوم

أ) ملخص

ب) -- استنتج S' و V' مساحة و حجم الهرم SMNPQ .



تمرين 6

نعتبر EFGH مكعب طول حرفه 3 cm و K منتصف [DH] .

1) – أرسم شكـلا مناسبا.

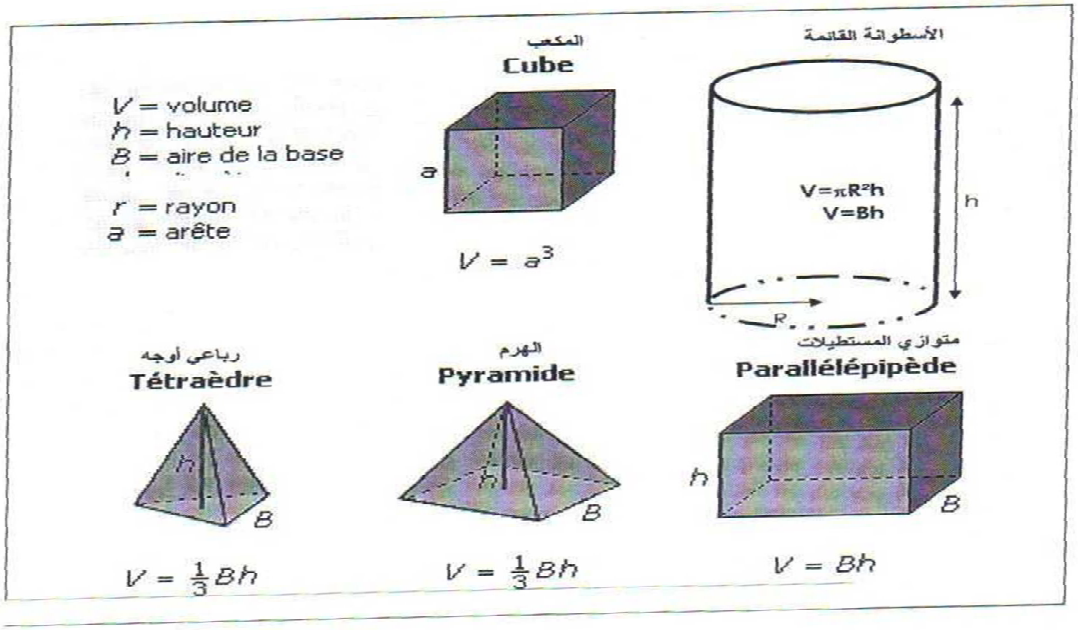
2) – أثبت أن HBD مثلث قائم الزاوية.

3) – أحسب : HB و DB .

4) – نعتبر P المسقط اعمودي للنقطة D على المستقيم (HB) .

أحسب : DP و HP .

5) – أحسب حجم رباعي الأوجه KDAC



ب) تطبيقات

تمرين 1

ليكن SABC رباعي أوجه منتظم طول حرفه 3cm

1) أحسب مساحة قاعدته

2) أحسب طول ارتفاعه

3) أحسب حجمه

تمرين 2

ليكن ABCDEFGH مكعب طول حرفه7cm

1) أنشء الشكل

2) أحسب حجم ABCDEFG

3) أحسب حجم رباعي الأوجه GEBF

تمرين 3

ليكن ABCDEFGH متوازي مستطيلات قائم أبعاده على التوالي هي 2cm و3cm و 5cm

1) أنشئ الشكل

2) أحسب حجم ABCDEFGH

3) لنعتبر الأسطوانة القائمة التي قاعدتيها الدائرتان المحيطتان على التوالي بABCD و EFGH

أحسب حجم التجويف الموجود بين هذه الأسطوانة ومتوازي المستطيلات ABCDEFGH

تمرين 7

نعتبر الشكـل أسفله بحيث :

ABCD رباعي الأوجه قاعدته مثلث متساوي الأضلاع $AD = 6\ cm$

و H المسقط العمودي للنقطة B على المستوى (ABD)

1) أحسب AB إذا علمت أن :

$AH = 5\sqrt{3}\ cm$ و $BG = 2\ cm$.

2) – لتكن I منتصف [AD] .

أحسب BI .

3) – أحسب S المساحة الجانبية لرباعي الأوجه ABCD .

4) – أحسب حجم V حجم رباعي الأوجه ABCD.

5) – نعتبر رباعي الأوجه BEFG تصغيرا لرباعي الأوجه ABCD .

إذا علمت أن نسبة التصغير هي $\frac{2}{3}$ فاحسب S' مساحة و V' وحجم رباعي الأوجه BEFG .

5) التكبير والتصغير

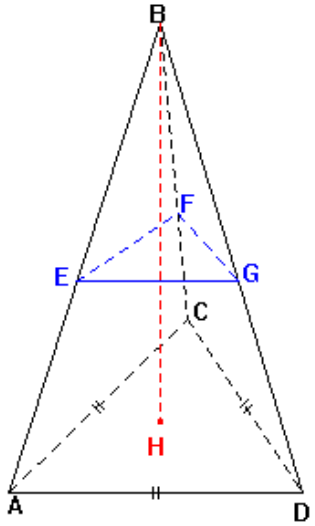
أ) تعريف

انطلاقا من مجسم نستخرج مجسما آخر يشابهه وذلك بضرب أبعاده في عدد حقيقي K موجب قطعا ويخالف 1.

ب) ملاحظة

* للقيام بتكبير مجسم يجب أن يكون K اكبر من 1 قطعا ،ونقول إننا قمنا بتكبير نسبته K

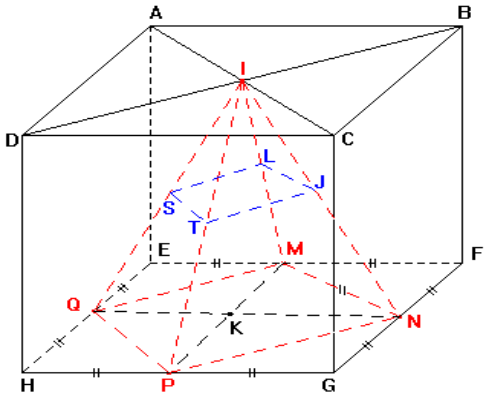
* للقيام بتصغير مجسم يجب أن يكون K أكبر قطعا من 0 وأصغر قطعا من 1، ونقول إننا قمنا بتصغير نسبته K



تمرين8

ABCDEFGH مكعب حيث : AB = 10 .

M و N و P و Q منتصفات [EF] و [FG] و[GH] و[HE] على التوالي .



1) – أحسب مساحة قاعدة للمكعب ABCDEFGH .

2) – أحسب حجم ABCDEFGH .

3) – أحسب : MN و PN و MP .

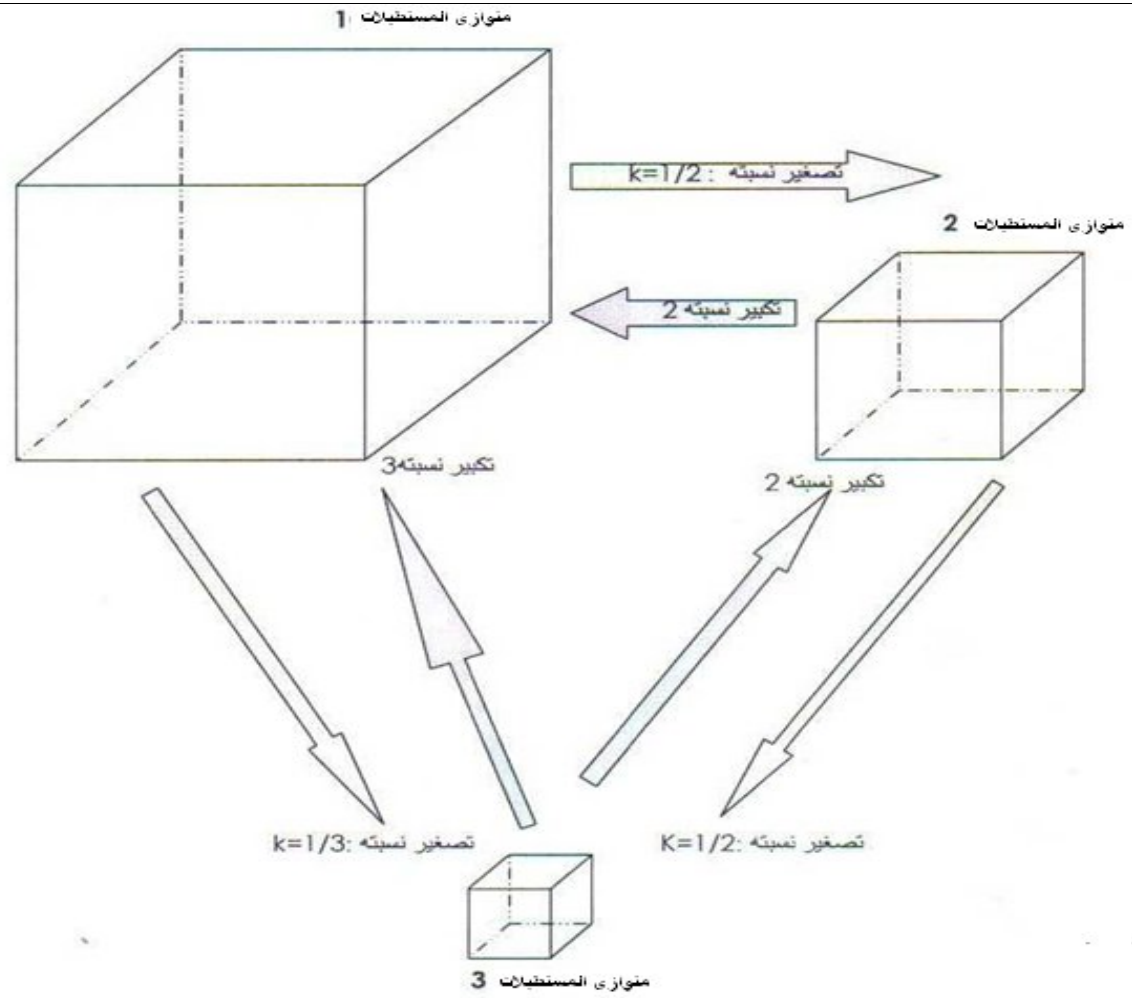
4) – استنتج طبيعة المثلث MNP .

5) – ماذا تستنتج عن الهرم INPQM .

6) – أحسب حجم الهرم INPQM علما أن ارتفاعه IK = 10 .

7) – استنتج حجم الهرم ISLJT علما أنه تصغير للهرم IMNPQ بنسبة $\frac{1}{4}$.

ج) مثال



متوازي المستطيلات 1 هو تكبير متوازي المستطيلات 2 بنسبة تكبير تسا وي 2

متوازي المستطيلات 3 هو تصغير متوازي المستطيلات 1 بنسبة تصغير تسا وي 1/3

متوازي المستطيلات 2 هو تصغير متوازي المستطيلات 1 بنسبة تصغير تسا وي 1/2

د) **أثر التكبير والتصغير على المساحات والحجوم**

❶ **تمرين تمهيدي**

ليكن SABC رباعي أوجه منتظم رأسه s وطول حرفه a cm

E منتصف [SA] و F منتصف [SB] و P منتصف [SC]

1) أنشئ الشكل

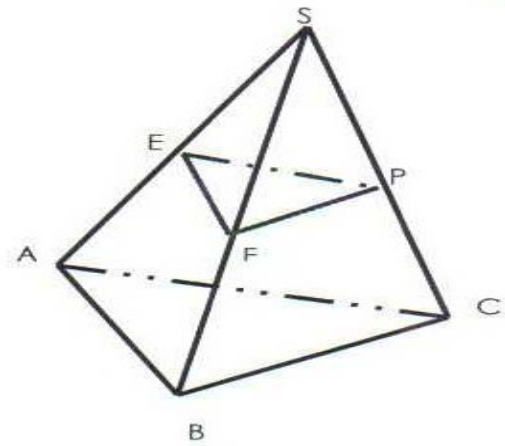
2) بين أن رباعي الأوجه SEFP تصغير لرباعي الأوجه SABC محددا نسبة التصغير

3) أحسب مساحة كل من ABC و EFP . ماذا تلاحظ؟

4) أحسب حجم كل من رباعي الأوجه SABC و SEFP . ماذاتلاحظ؟

إشارة للحل

1)شكل هندسي



2) لنبين تصغير رباعي الأوجه SEFP مع تحديد نسبة التصغير

*لدينا E منتصف [SA] و F منتصف [SB]
إذن (EF) يوازي (AB) في المثلث SAB
وبالتالي حسب خاصية طاليس نجد : $\frac{SE}{SA}=\frac{SF}{SB}=\frac{EF}{AB}=\frac{1}{2}$ (1)

*ولدينا P منتصف [SC] و F منتصف [SB]
إذن (FP) يوازي (BC) في المثلث SBC
وبالتالي حسب خاصية طاليس نجد : $\frac{SF}{SB}=\frac{SP}{SC}=\frac{FP}{BC}=\frac{1}{2}$ (2)

* ولدينا P منتصف [SC] و E منتصف [SA]
إذن (EP) يوازي (AC) في المثلث SAC
وبالتالي حسب خاصية طاليس نجد : $\frac{SP}{SC}=\frac{SE}{SA}=\frac{EP}{AC}=\frac{1}{2}$ (3)

من (1) و (2) و (3) نجد : $\frac{SF}{SB}=\frac{EF}{AB}=\frac{SP}{SC}=\frac{FP}{BC}=\frac{EP}{AC}=\frac{1}{2}$

إذن أطوال أضلا ع رباعي الأوجه SEFP متناسبة على التوالي مع أطوال أضلاع رباعي الأوجه SABCD حيث 1/2 معامل التناسب
وبالتالي SEFP و SABC متشابهان حيث 1/2 معامل التشابه
إذن رباعي الأوجه SEFP تصغير لرباعي الأوجه SABC حيث نسبة التصغير هي K=1/2

3) لنحسب مساحة كل من القاعدة ABC و EFP

بما أن ABC مثلث متساوي الأضلاع طول حرفه a cm فإن مساحته S هي : $S=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

وبما أن EFP مثلث متساوي الأضلع طول حرفه a/2 cm فإن مساحته 'S هي: $S'=\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$

نلاحظ ان $\frac{\sqrt{3}}{8}=1/4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ أي $\frac{\sqrt{3}}{8}=(1/2)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن $\boxed{S'=K^2\times S}$

4) لنحسب حجم كل من رباعي الأوجه SABC ورباعي الأوجهSEFP

بما أن SABC رباعي أوجه منتظم طول حرفه a cm(قاعدته ABC)

فإن ارتفاعه h هو: $h=\frac{\sqrt{6}}{3}a\ cm$

وبالتالي حجمه V هو: $V=\frac{1}{3}\times h\times S$ (1)

وبما أن SEFP رباعي أوجه منتظم طول حرفه a/2 cm (قاعدته EFP)

فإن ارتفاعه 'h هو : $h'=\frac{\sqrt{6}}{6}a\ cm$ أي $h'=\frac{1}{2}h$ أي $h'=K\times h$

وبالتالي حجمه 'V هو: $V'=\frac{1}{3}\times h'\times S'$

أي $V'=\frac{1}{3}\times K\times h\times K^2\times S$ (2)

من (1) و(2) نجد : $\boxed{V'=k^3\times V}$

● قواعد

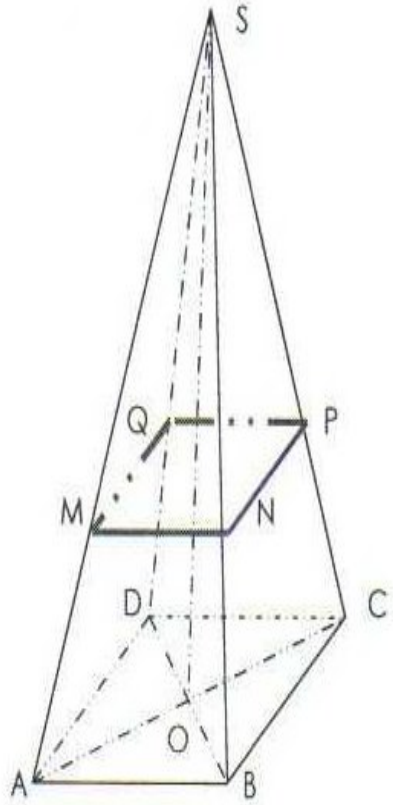
١) قاعدة 1

إذا كانت $\mathcal{S}$ مساحة شكل هندسي في البداية و $\mathcal{S}'$ مساحة الشكل المحصل عليه بعد التكبير أو التصغير الذي نسبته K فإن : $\mathcal{S}'=K^2.\mathcal{S}$

٢) قاعدة 2

إذا كان V حجم مجسم في البداية و 'V حجم المجسم المحصل عليه بعد التكبير أو التصغير الذي نسبته K فإن : $V'=K^3.V$

❸ **تمرين تطبيقي**



تمرين

لنعتبر الهرم المنتظم SABCD الذي رأسه S وقاعدته المربع ذو المركز O .
SMNPQ تصغير للهرم SABCD
حيث: $\frac{2}{3}$ نسبة التصغير
علما أن AB=5, 4cm
و OS=11cm

1) بين أن V حجم SABCD هو $106,92cm^3$
2) حدد مساحة MNPQ
3) حدد V' حجم SMNPQ